ANNEE 2000

CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ECOLE DE L'AIR

CONCOURS MP

PREMIÈRE ÉPREUVE
DE
MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 13

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

T.S.V.P.

Dans tout ce problème on notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels.

Ce problème propose d'établir les principales propriétés d'un opérateur appelé transformateur de Laplace et noté $\mathcal{L}$ puis de calculer son action sur certaines fonctions.

On définit pour cela un ensemble E formé des fonctions f appartenant à l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et telles que, pour tout réel α strictement positif la fonction $t \mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout élément f de E et tout réel x strictement positif, on pose alors:

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-x.t}dt$$

Partie I : *propriétés de la transformée de Laplace d'un élément de E*

1. Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, la fonction $t \mapsto P(t)$ est élément de E.

2. Montrer que toute fonction f continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ est aussi élément de E.
Montrer que les primitives d'une telle fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont aussi des éléments de E.
Montrer de même que toute fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^{+}$ est élément de E.

3. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4.Montrer que, pour tout élément f de E et pour tout entier naturel n, la fonction

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ &t \mapsto t^n f(t) \end{aligned}$$

est aussi élément de E.

5. Montrer que, pour tout élément f de E, $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

6. . Montrer que, pour tout élément f de E, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifie:

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ (\mathcal{L}(f))^{(p)}(x) = (-1)^p \int_0^{+\infty} t^p f(t)e^{-x.t}dt$$

7. Montrer que, pour tout élément f de E, $\lim_{x \to +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.

8. On considère dans cette question une fonction h continue sur $\mathbb{R}^{+}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et telle que h et sa dérivée h' soient intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Montrer que $h(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*},\ \mathcal{L}(h')(x) = -h(0) + x\mathcal{L}(h)(x)$.
Montrer que $\lim_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(h)(x) = h(0)$ et que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\mathcal{L}(h)(x) = \lim_{t \to +\infty} h(t)$.

9. Montrer de même que, si h est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ telle que h et h' soient bornées sur $\mathbb{R}^+$, on a encore:
$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \mathcal{L}(h')(x) = -h(0) + x\mathcal{L}(h)(x)$

Partie II : *Détermination de la transformée de Laplace de certaines fonctions*

A.

10. Montrer que les fonctions $f : t \mapsto \sin(t)$, $g : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ et $h : t \mapsto \int_0^t \dfrac{\sin(u)}{u} du$ sont éléments de E et déterminer leur transformée de Laplace.

B.

11. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, périodique de période T ($T>0$) et telle que $f(0) = 0$ .Soit g la fonction nulle sur l'intervalle $[T,+\infty[$ et définie sur $[0,T]$ par: $\forall t \in [0,T]$, $g(t) = f(t)$.
Montrer que ces deux fonctions appartiennent à l'ensemble E et démontrer la relation suivante:
$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \mathcal{L}(f)(x) = \dfrac{\mathcal{L}(g)(x)}{1 - e^{-x.T}}$

12. Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $f : t \mapsto |\sin(\pi.t)|$.

C.

Soit une série entière, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence R , $R > 0$ (si le rayon est infini, on posera $\dfrac{1}{R} = 0$).

13. Montrer que, pour tout réel c strictement supérieur à $\dfrac{1}{R}$, il existe M tel que:
$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M.c^n$.

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

14. Montrer que, pour tout réel $c > \dfrac{1}{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-c.t} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} t^n$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\int_0^{+\infty} e^{-c.t} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{c^{n+1}}$.

15. Montrer que la fonction $J : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sqrt{x}\cos(t))dt$ est élément de E.

16.Déterminer le développement en série entière de J et sa transformée de Laplace .
(on admettra le résultat suivant: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)dt = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$)

D.

On admettra et on pourra utiliser dans cette partie que la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ vérifie:

$$\forall x\in \mathbb{R}^{+*},\ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\gamma-\frac{1}{x}+x\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+x)}$$

(où γ désigne une constante strictement positive appelée constante d'Euler).

On notera Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+}$ par $\forall x\in \mathbb{R}^{+},\Phi(x)=\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}$

Soit la fonction g définie par: $\forall t\in\mathbb{R}^{+*}, g(t)=\frac{t}{e^t-1}$.

17. Montrer que g est un élément de E.

18. Montrer que Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+}$.

19. Montrer que $\forall x\in \mathbb{R}^{+*},\ \mathcal{L}(g)(x)-\mathcal{L}(g)(x+1)=\frac{1}{(x+1)^2}$

20. Montrer que Φ' vérifie la relation: $\forall x\in \mathbb{R}^{+*},\ \Phi'(x)-\Phi'(x+1)=\frac{1}{(x+1)^2}$.

21. Calculer la transformée de Laplace de g.